АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том VI 1960 Вып. 3

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ УПРУГИХ ВОЛН

З. А. Гольдберг

Рассматривается взаимодействие упругих волн в неограниченном изотропном твердом теле, в уравнениях движения которого учитываются наряду с линейными и квадратичные относительно производных от вектора деформации члены.

Получим исходные уравнения движения изотропного твердого тела, следуя схеме, намеченной в книге [1, ч. 2, § 26]. Рассмотрим бесконечно малое изменение внутренней энергии единицы объема $d\varepsilon$ для адиабатических процессов. Вариация $\delta\varepsilon$ может быть написана в виде*

$$\delta\varepsilon = \sigma_{ik}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}\delta u_i) - \delta u_i\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор деформации,

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}. \tag{2}$$

Коэффициенты при множителе $(-\delta u_i)$ в формуле (1) являются компонентами силы, отнесенной к единице объема тела, так как $d\varepsilon$ для адиабатических процессов равно работе сил внутренних напряжений, взятой со знаком минус. Поэтому уравнения движения можно записать в виде

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{3}$$

где ρ_0 — плотность недеформированного тела.

Чтобы получить уравнения движения с точностью до квадратичных членов включительно относительно $\partial u_i/\partial x_k$, необходимо написать общее выражение для ε с учетом членов второй и третьей степеней по тензору деформации u_{ik}. Соответствующее выражение для упругой энергии изотропного тела имеет вид:

$$\varepsilon = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)u_{ll}^2 + \frac{A}{3}u_{ik}u_{il}u_{kl} + Bu_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3}u_{ll}^3, \tag{4}$$

где μ — модуль сдвига, K — модуль сжатия, A, B, C — некоторые скалярные коэффициенты.

Используя точное выражение для тензора деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

* По всем дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3; причем $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $u_1 = u_x$ и тому подобное.

и соотношения (2) — (4), получим следующие уравнения движения:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - \left(K + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_i} =$$

$$= \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \left(K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right) +$$

$$+ \left(K - \frac{2}{3}\mu + B\right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \left(\frac{A}{4} + B\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_i} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) + (B + 2C) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \quad (5)$$

В частном случае плоских волн, распространяющихся вдоль оси OX, когда

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{i} u_x(x, t) + \mathbf{j} u_y(x, t) + \mathbf{k} u_z(x, t),$$

уравнения (5) примут следующий вид:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \quad (6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \gamma \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \gamma \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \quad (8)$$

где

$$\alpha = K + \frac{4}{3}\mu, \quad \beta = 3\alpha + 2A + 6B + 2C, \quad \gamma = \alpha + \frac{A}{2} + B.$$

Перейдем теперь к рассмотрению взаимодействия упругих волн. В линейном приближении система уравнений (6) — (8) состоит из трех независимых волновых уравнений для u_x, u_y, u_z. Это, как известно, означает, что продольные и поперечные упругие волны распространяются независимо друг от друга. Квадратичные же относительно du_i/dx_k члены в уравнениях (6) — (8) зависят от всех компонент вектора смещения. Поэтому, если одновременно распространяются продольные и поперечные волны, то во втором приближении они взаимодействуют между собой.

Рассмотрим одну поперечную волну. Для этого подставим в уравнения (6) — (8) значения

$$u_x = u_z = 0, \quad u_y \neq 0.$$

В результате получим, наряду с обычным линейным уравнением для u_y, соотношение

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0,$$

которое тождественно не выполняется. Это означает, что уравнения (6) — (8) не удовлетворяются при наличии одной поперечной волны. Оказывается, что поперечные волны при учете второго приближения не могут существовать без продольных волн. Например, если поперечная волна возбуждается в плоскости $x = 0$, так что при $x = 0$ $u_x = u_z = 0$, $u_y =$

$=a(1-\cos\omega t)$, то согласно уравнениям (6) — (8), наряду с обычной поперечной волной*

$$u_y = a\left[1-\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_t}\right)\right], \tag{9}$$

должна существовать продольная волна:

$$u_x = b\sin\omega x\left(\frac{1}{c_t}-\frac{1}{c_l}\right)\cos\left[2\omega t - \omega x\left(\frac{1}{c_l}+\frac{1}{c_t}\right)\right]. \tag{10}$$

Здесь

$$c_l = \frac{\sqrt{\lambda+2\mu}}{\rho_0} \quad \text{и} \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$$

скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно,

$$b = \frac{\gamma\omega a^2}{4\rho_0 c_t^3 (c_l^2/c_t^2-1)}.$$

Множитель $\sin\omega x\left(\dfrac{1}{c_t}-\dfrac{1}{c_l}\right)$ в (10) приводит к нулевым значениям амплитуды в точках, где аргумент $\omega x\left(\dfrac{1}{c_t}-\dfrac{1}{c_l}\right)$ кратен числу π.

Если в уравнения (6)—(8) подставить значения $u_x \neq 0$, а $u_y \equiv u_z \equiv 0$, то получим одно уравнение для продольной волны:

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \beta\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial x},$$

которое с точностью до коэффициентов α и β совпадает с соответствующим ему уравнением для величины смещенияв жидкой или газообразной среде. Поэтому все результаты, полученные для продольных волн в жидких или газообразных средах в переменных Лагранжа, могут быть легко обобщены на случай твердых тел путем замены в окончательных формулах соответствующих коэффициентов (см., например, [2]). Так, формула для расстояния, на котором синусоидальная в точке $x=0$ волна превращается в волну пилообразной формы, для жидкой среды имеет вид:

$$L_1 = \frac{c^2}{m_1 u_0 \omega^2}, \tag{11}$$

где $m_1 = 1 + \rho/c(dc/d\rho)_s$, $(dc/d\rho)_s$ — производная от скорости звука по плотности при постоянной энтропии, u_0 — амплитуда волны смещения в плоскости $x=0$. Для твердого тела соответствующее расстояние

$$L_2 = \frac{c_l^2}{m_2 u_0 \omega^2}, \tag{12}$$

где $m_2 = -\beta/2\alpha$.

Отношение L_2/L_1 при одинаковых u_0 и ω будет равно

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\left(\frac{c_l}{c}\right)^2. \tag{13}$$

Для воды $m_1 \approx 4{,}5$; для железа, согласно работе [3], по результатам которой можно оценить коэффициенты A, B и C, $m_2 \approx 7{,}5$; отношение $(c_2/c)^2 \approx 12$; значит, L_2 для железа в этом случае приблизительно в 7 раз больше, чем L_1 для воды.

---

* Члены, стоящие в правой части уравнения (7), в рассматриваемом случае будут членами третьего приближения, поэтому при учете только второго приближения уравнение (7) остается линейным.

Обратим внимание на различные особенности поведения поперечной и продольной волн. При распространении поперечной волны появляется продольная волна, в то время как при распространении продольной волны поперечная не возникает. В отличие от продольных волн форма поперечной волны в процессе распространения не меняется (см. (9)).

К этому выводу можно прийти и следующим образом. Как известно (см., например, [1]), скорость распространения точек профиля продольной волны $u = c + v$, где c — скорость звука, а v — колебательная скорость в рассматриваемой точке. Искажение формы продольной волны происходит из-за того, что скорость u неодинакова у различных точек профиля. Это вызывается двумя причинами. Во-первых, скорость звука меняется в зависимости от того, насколько сжата или разрежена среда продольной волной; во-вторых, колебательная скорость совпадает по направлению со скоростью u и, в зависимости от знака, увеличивает или уменьшает последнюю. При распространении же поперечной волны сжатий и разрежений среды не возникает, а колебательная скорость направлена перпендикулярно к скорости u. Поэтому скорость u одинакова у всех точек профиля и, значит, форма поперечной волны не должна искажаться.

Следует иметь в виду, что эффекты второго приближения малы, их величина на порядок по числу Маха меньше величин первого приближения. Однако в некоторых случаях, благодаря своеобразному явлению резонанса, амплитуда величин второго порядка растет и в конце концов перестает быть малой. Хорошо известен факт роста амплитуды 2-й гармоники в процессе распространения первоначально синусоидальной продольной волны. Когда профиль продольной волны достигает пилообразной формы, амплитуды 1-й и 2-й гармоник становятся одного порядка.

Резонансное взаимодействие двух продольных волн, распространяющихся в одном направлении, приводит к появлению продольных волн с комбинационными частотами вида $\omega_1 \pm \omega_2$, причем амплитуда последних растет в процессе распространения волны. Соответствующий случай в газовой среде рассмотрен, например, в работе [4].

Две же поперечные волны, распространяющиеся в одном направлении, как видно из уравнений (7) — (8), не взаимодействуют между собой.

Если две плоские упругие волны распространяются под углом друг к другу, то в результате их взаимодействия, согласно уравнению (5), должны появиться продольные и поперечные волны с комбинационными частотами. Резонансное же взаимодействие в этом случае, как показано в книге [1, ч. 2, § 26], можно ожидать только в двух случаях: когда две поперечные волны или поперечная и продольная волна «рождают» продольную волну.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. Н. Андрееву и участникам его семинара за ценные замечания, высказанные при обсуждении настоящей заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
2. З. А. Гольдберг. Плоские акустические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде (кандид. диссерт.). Акустический ин-т АН СССР, 1958.
3. D. S. Huges, J. L. Kelly. Second-order elastic deformation of solids. Phys. Rev., 1953, 92, 5, 1145—1149.
4. A. L. Thuras, R. T. Jenkins, H. T. O'Neil. Extraneous frequencies generated in air carrying intense sound waves. J. Acoust. Soc. America, 1934, 6, 3, 173—180.

Магнитогорский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 28 сентября 1959 г.